224	Equations différentielles linéaires d'ordre deux: x"+a(t)x'+b(t)x=c(t), où a, b, c sont des fonctions continues sur un intervalle de ℝ, à valeurs ℝ ou ℂ.	Variation des constantes	Monier 4 p.209 Sorosina

K = ℝ ou ℂ

I. Définition et propriétés.

A. Définitions.

Def 1: Soient (a, b, g) des fonctions continues de I intervalle de ℝ dans K. On appelle **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 normalisée** l'équation différentielle du type:

$(E) \quad x''+ax'+bx=g$

d'inconnue $x: I \to K$ deux fois dérivable sur I.

$(E_0) \quad x''+ax'+bx=0$

est **l'équation homogène associée.**

Notations: S_0 : ens. des solutions de E_0 sur I,
S ensemble des solutions de E sur I.

Remarque: Posant $Y=\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$

on se ramène à un système diff. linéaire d'ordre 1, dit **système linéaire associé**: Y' = AY + B,
d'inconnue Y dérivable sur I.

B. Existence des solutions et pb de Cauchy.

Th 1: (**Th. de Cauchy-Lipschitz linéaire**).
$\forall (t_0 \in I, x_0 \in K, x_1 \in K)$, il existe une solution et une seule x de $(E) \quad x''+ax'+bx=g$ t.q. $\begin{cases} x(t_0)=x_0 \\ x'(t_0)=x_1 \end{cases}$

C. Structure des espaces S et S_0.

Prop 1:
1) S_0 est un **K-ev de dim. 2**, et pour tout $t_0 \in I$ fixé, l'application $S_0 \to K^2;\ x \mapsto (x(t_0), x'(t_0))$ est un isomorphisme de K-ev.
2) S est un **K-espace affine de dim. 2**, de direction S_0, et pour tout $t_0 \in I$ fixé, $S \to K^2;\ x \mapsto (x(t_0), x'(t_0))$ est un isomorphisme de K-espaces affines.

Conséquence (+) : La **solution générale de (E)** est la **somme** d'une **solution particulière de (E)** et de la **solution générale de (E_0)**.

II. Wronskien (1).

Def 2: Soient $x_1, x_2 : I \to K$ deux applications dérivables sur I. On appelle **Wronskien** de (x_1, x_2) l'application $W_{x_1,x_2} : I \to K$ définie par: ∀t∈I,

$$W_{x_1,x_2}(t)=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x'_1(t) & x'_2(t) \end{vmatrix} = x_1(t).x'_2(t)-x'_1(t).x_2(t)$$

Prop 2: Si x_1, x_2 sont deux solutions de (E_0) sur I alors:
1) $W_{x1,x2}$ est dérivable sur I et: $W'_{x1,x2} + a\, W_{x1,x2} = 0$
2) (x_1, x_2) libre ⇔ $W_{x1,x2} \neq 0$ ⇔ $(\forall t_0 \in I, W_{x1,x2}(t_0) \neq 0)$

Exemple 1: (SOR p.331) Soient a et b deux fonctions continues de I dans ℝ.
On considère (E_0): x"+ ax' +bx = 0.
Montrer que si x_1 et x_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de (E_0), alors il y a exactement un zéro de x_2 entre deux zéros consécutifs de x_1 .

III. Résolution.

A. Résolution de (E_0).

a) Si l'on une famille libre (x_1, x_2) de solut°.

Alors, comme S_0 est un K-ev de dim 2, on a:
$S_0 = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \ / (\lambda_1, \lambda_2) \in K^2\}$.

Exemple 2: $x''-\frac{2t}{1+t^2}x'+\frac{2}{1+t^2}x=0$, qui équivaut à:
$(1+t^2)x''-2tx'+2x=0$, dont $x_1(t)=t$ et $x_2(t)=t^2-1$ sont deux solutions (base de S_0).

On peut vérifier que la famille est libre en utilisant le wronskien.

b) Si les coefs a, b sont constants.

Soient a, b ∈K. (Monier MPSI) (K=ℂ).

Th 2: (E_0) y"+ay'+by=0 , $y: I \to \mathbb{C}$ deux fois dérivable.
On note $r^2+ar+b=0$ (E') **l'équation caractéristique** associée, et $\Delta=a^2-4b$ son discriminant.
1) Si $\Delta \neq 0$ et r_1, r_2 sont deux sol° distinctes ds ℂ de (E') alors les éléments de S_0 sont les $y: I \to K$ tq:
$y(x)=\lambda_1 e^{r_1 x}+\lambda_2 e^{r_2 x}$, avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$.
2) Si $\Delta = 0$ et r_1 est une sol° double ds ℂ de (E') alors les éléments de S_0 sont les $y: I \to K$ tq:
$y(x)=\lambda_1 x e^{r_1 x}+\lambda_2 e^{r_1 x}=(\lambda_1 x+\lambda_2)e^{r_1 x}$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$.

Remarque: Si K=ℝ et Δ<0, et si $r_1=\alpha+i\beta$ et r_2 sont deux solutions complexes conjuguées de (E'), alors les éléments de S_0 sont les $y: I \to \mathbb{R}$ tq:
$y(x)=e^{\alpha t}(A\cos\beta t+B\sin\beta t)$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Exemple 3: $y''+\omega^2 y=0$, $\omega \in \mathbb{R}^{+*}$ (équation masse-ressort, où $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ (pulsation), k raideur du ressort, m masse.
Période $T=\frac{2\pi}{\omega}$. L'amortissement (frottement) ajoute un terme en y'. (Voir aussi SOR Ex.10.28 p.335)

c) Si a, b sont des app° continues sur I.

Prop 3: **Méthode de Lagrange**. Si l'on connaît une solution $x_1 \neq 0$ de (E_0) sur I, alors il existe autre une sol° x_2 de (E_0) sur I, linéairement indépendante de x_1, de la forme $x_2(t)=\lambda(t)x_1(t)$, où λ: I→K est non constante deux fois dérivable, et vérifie: $\lambda''+\frac{ax_1+2x'_1}{x_1}\lambda'=0$.

Exemple 4: $(E_0)\quad (t^2+1)x''-2x=0$

Inconvénient: il faut connaître une solution "évidente"; on la cherche souvent sous la forme d'un polynôme ou d'une exponentielle.

B. Résolution de (E).

On suppose ici que l'on connaît une base (x_1, x_2) de S_0.

a) Si l'on connaît une "solut° évidente" de (E).

Notons-la ξ. Alors $S=\{\xi+\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2 ; (\lambda_1,\lambda_2)\in K^2\}$.

Exemple 7 : $(E)\quad t^3x''+tx'-x=1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

b) Variation des constantes.

Cf. Sorosina p.342.

Prop 4: Supposons connue une base (x_1,x_2) de S_0. Alors :

1) Le système $\begin{cases} x_1\mu_1+x_2\mu_2=0 \\ x'_1\mu_1+x'_2\mu_2=g\end{cases}$ admet une seule solution (μ_1,μ_2) dans $C^0(I,K)$.

2) Si λ_1 (resp. λ_2) désigne une primitive qcq de μ_1 (resp. μ_2) sur I, alors $y=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2$ est une sol° de (E) sur I.

Exemples 5:

a) Coefs constants: $x''+\omega^2x=g$, $\omega\in\mathbb{R}_+^*$.

Oscillateur harmonique forcé, le second membre représente l'excitation, éventuellement modifiée par une multiplication par une cte, un déphasage...

b) Coefs non constants: $(t^2-3)x''-4tx'+6x=\dfrac{(t^2-3)^3}{t}$

IV. Problème des raccords.

Equa. diff. non normalisée:

$(e)\quad \alpha(t)x''(t)+A(t)x'(t)+B(t)x(t)=G(t)$

où $\alpha,A,B,G:I\to K$ continues.

Si par exemple α s'annule en $t_0\in \overset{o}{I}$, on cherche à résoudre sur $]-\infty;t_0[$ et $]t_0;+\infty[$, puis on voit si l'on peut "raccorder" en t_0 les solutions trouvées, par continuité, dérivabilité première, dérivabilité seconde.

V. Utilisation de séries entières.

Une autre façon de chercher des solutions particulières de (E_0) est de rechercher celles qui sont développables en série entière. Elle a de meilleures chances d'aboutir (calculs plus simples) si les coefs de l'équation sont polynomiaux.
L'équation fournit alors des conditions sur les coefficients de la S.E.
Si l'on en trouve assez (lin^t indépendantes) pour faire une base, on a résolu le problème, mais toutes les solutions d'une équa diff ne sont pas forcément DSE.
Par ailleurs, il faut prendre garde au rayon de convergence.

VI. Notes.

Rapport de jury 2011 : Le développement ne peut se limiter à la résolution effective d'une équation scalaire à coefficients constants ; des études qualitatives de solutions, même simples, peuvent ici être proposées.
De manière plus particulière, le Wronskien est peu exploité et assez mal compris.

(1) –Wikipedia-: Le **wronskien** est le déterminant d'une famille de solutions d'une équation différentielle linéaire homogène y'=a.y. À l'aide du wronskien, il est possible de déterminer ***si cette famille constitue une base de l'espace des solutions.***
En outre, même sans aucune information sur les solutions, ***l'équation d'évolution du wronskien*** est connue. Ceci donne une information quantitative précieuse et offre même une stratégie de résolution pour certaines équations différentielles.
Le wronskien peut être également défini pour des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur, puisqu'on peut les ramener à l'ordre 1. Il est notamment ***très utile à la résolution des équations différentielles linéaires homogènes scalaires d'ordre 2***: y'' = ay' + by + c.
Soit l'équation différentielle *E*:*y*'' = *ay*' + *by*, dite équation linéaire homogène scalaire d'ordre 2 sous forme résolue, dans laquelle *a,b* sont des fonctions continues.Si x_1 et x_2 sont deux solutions de cette équation, leur **wronskien** est défini par

$$W_{x_1,x_2}(t)=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t)\\ x'_1(t) & x'_2(t)\end{vmatrix}=x_1(t).x'_2(t)-x'_1(t).x_2(t)$$

Alors qu'on n'a pas toujours une solution explicite de l'équation différentielle E, le wronskien peut être déterminé. Il satisfait l'équation d'évolution:

$$W'(t)=\begin{vmatrix} x'_1(t) & x'_2(t)\\ x'_1(t) & x'_2(t)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t)\\ x''_1(t) & x''_2(t)\end{vmatrix}$$

$$=0+\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t)\\ ax'_1(t)+bx_1(t) & ax'_2(t)+bx_2(t)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t)\\ ax'_1(t) & ax'_2(t)\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t)\\ x'_1(t) & x'_2(t)\end{vmatrix}=a.W(t)$$

Il s'agit d'une ***équation différentielle linéaire d'ordre un***.
Le wronskien peut donc être calculé à l'aide d'une primitive A de a : W(t) = W_0exp(A(t))
où W_0 est une constante dépendant des conditions initiales.
Le wronskien s'interprète comme une aire dans le plan (y,y') appelé espace des phases par les physiciens. Le terme a dans l'équation différentielle E est qualifié de terme d'amortissement. L'aire du triangle formé par les valeurs de deux solutions reste constante au cours du temps si le terme d'amortissement est nul, elle décroît de façon exponentielle s'il est strictement positif.